



WEST BENGAL STATE UNIVERSITY

B.Sc. General Part-III Examination, 2020

MATHEMATICS

PAPER-MTMG-IV

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 50

*The figures in the margin indicate full marks.
Candidates should answer in their own words
and adhere to the word limit as practicable.*

*প্রাঙ্গিক সীমার মধ্যস্থ সংখ্যাটি পূর্ণমান নির্দেশ করে।
পরীক্ষার্থীরা নিজের ভাষায় যথা সম্ভব শব্দসীমার মধ্যে
উত্তর করিবে।*

All symbols are of usual significance.

Answer any five questions from the following

10×5=50

নিম্নলিখিত যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও

1. (a) Prove that in a Boolean Algebra the complement x' of an element x is unique. Prove also that for any three elements a , b and c of a Boolean Algebra $(a+b)+c = a+(b+c)$. 2+3
 প্রমাণ করো যে কোন বুলীয় বীজগণিতের কোন পদ x -এর পূরক পদ x' অদ্বিতীয়। আরও প্রমাণ করো যে কোন বুলীয় বীজগণিতের যে কোন তিনটি পদ a , b ও c -এর জন্য $(a+b)+c = a+(b+c)$
- (b) Obtain the complement of the Boolean expression $x'(y+z) \cdot (x+y'+z')$ in conjunctive normal form (CNF). Transform the CNF into disjunctive normal form (DNF). 2+3
 $x'(y+z) \cdot (x+y'+z')$ এই বুলীয় রাশিমালার পূরক রাশিমালা conjunctive normal form (CNF) আকারে প্রকাশ করো এবং এই পূরক রাশিমালাটিকে disjunctive normal form (DNF) আকারে প্রকাশ করো।
2. (a) Why are binary numbers used in computer design? Convert the following two decimal numbers x and y to their binary equivalents and obtain the value of $(x+y)$ and $(x-y)$ in binary system: $x=(12.57)_{10}$ and $y=(6.7)_{10}$. 1+2+2
 Computer পরিকল্পনায় দ্বিনিধানী রাশি ব্যবহার করা হয় কেন? নিম্নলিখিত দুইটি দশমিক সংখ্যা x এবং y -কে তাদের দ্বিনিধানী সমতুল সংখ্যায় পরিণত করো এবং $(x+y)$ ও $(x-y)$ এর মান দ্বিনিধানী পদ্ধতিতে নির্ণয় করো: $x=(12.57)_{10}$ এবং $y=(6.7)_{10}$
- (b) Simplify the following Boolean function using Karnaugh map: 5
 $f(x, y, z) = x'yz + x'yz' + xyz + xyz'$
 Karnaugh map ব্যবহার করে $f(x, y, z) = x'yz + x'yz' + xyz + xyz'$ বুলীয় অপেক্ষকটি সরল করুন।
3. (a) Construct the truth table for the switching function represented by the Boolean expression (without simplifying) $z(x+y') + xz' + z'(z+y')$ 5
 $z(x+y') + xz' + z'(z+y')$ সুইচিং অপেক্ষকটির সত্য সারণী গঠন করুন।

- (b) Explain what you understand by conjunctive normal form of a Boolean function. 1+4
Write down the following Boolean function in full conjunctive normal form:

$$f(x, y, z) = (x'y + yz)' + y'$$

একটি বুলীয় অপেক্ষকের সংযোজক স্বভাবী আকার বলতে কি বোঝো, ব্যাখ্যা করো। নিম্নলিখিত বুলীয় অপেক্ষকটিকে পূর্ণ সংযোজক স্বভাবী আকারে লেখো:

$$f(x, y, z) = (x'y + yz)' + y'$$

4. (a) Draw a switching circuit for the Boolean expression $(x' + y) \cdot [x' + (z \cdot y')] + x \cdot (y + z)$ 3+2
Obtain a simpler equivalent switching circuit.

নিম্নলিখিত বুলীয় রাশিমালাটির দ্বারা প্রকাশিত সুইচ বর্তনীটি গঠন করো। এই বর্তনীর সমতুল্য একটি সহজতম সুইচ বর্তনী নির্ণয় করো। $(x' + y) \cdot [x' + (z \cdot y')] + x \cdot (y + z)$.

- (b) Define 'NAND' logic gate with the truth table. Draw a logic circuit of the following 2+3
function using only 'NAND' gates $f(x, y) = xy$

Truth Table সহ 'NAND' যৌক্তিক দ্বারের সংজ্ঞা লেখো এবং শুধুমাত্র (সত্যসারণী) 'NAND' যৌক্তিক দ্বারের সাহায্যে $f(x, y) = xy$ অপেক্ষকটির একটি যৌক্তিক বর্তনী অঙ্কন করো।

5. (a) How the array variables are declared in FORTRAN 77/90 program? Write program 1+4
segment in FORTRAN 77/90 to read and print a matrix $A = (a_{ij})_{5 \times 4}$

Array চলরাশিগুলিকে FORTRAN 77/90 প্রোগ্রামে কোন্ বিবৃতির সাহায্যে প্রকাশ করা হয়? একটি ম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})_{5 \times 4}$ read এবং print করার জন্য FORTRAN 77/90 তে প্রোগ্রাম অংশ লেখো।

- (b) Write a program in FORTRAN 77/90 to find the sum of $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 51^2$ and 5
print the result.

নিম্নলিখিত শ্রেণীটির যোগফল বের করার জন্য এবং প্রিন্ট করার জন্য একটি FORTRAN 77/90 প্রোগ্রাম লেখো।

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 51^2$$

6. Answer any **five** questions from the following: 2×5 = 10
নিম্নলিখিত যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

- (a) Find the limit function of the sequence of functions $\{f_n\}_n$ where

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}, \quad x \in D = \{x \in R : 0 < x < \infty\} \text{ and } n \in N.$$

$\{f_n\}_n$ অনুক্রমটির সীমা অপেক্ষক নির্ণয় করো যেখানে

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}, \quad x \in D = \{x \in R : 0 < x < \infty\} \text{ এবং } n \in N$$

- (b) Show that the sequence of functions $\{f_n\}_n$ defined by $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $x \in R$ and 5
 $n \in N$ converges uniformly on R .

দেখান যে, $\{f_n\}_n$ এই অনুক্রমটি R এর মধ্যে সমভাবে অভিসারী যেখানে $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $x \in R$.

- (c) Find the radius of convergence of the power series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, where $a_n = \frac{n^2}{n!}$, $n \geq 1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ এই ঘাত শ্রেণীটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো, যেখানে $a_n = \frac{n^2}{n!}$, $n \geq 1$.

(d) Find the general solution of the differential equation

$$(D^3 - 6D^2 + 5D)y = 0 \text{ where } D \equiv \frac{d}{dx}.$$

$$(D^3 - 6D^2 + 5D)y = 0 \text{ এই অবকল সমীকরণটির সাধারণ-সমাধান নির্ণয় করো যেখানে } D \equiv \frac{d}{dx}.$$

(e) Find the particular integral y_p of the differential equation

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 3\frac{d^2 y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 2y = e^x + \cos x$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 3\frac{d^2 y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 2y = e^x + \cos x \text{ এই অবকল সমীকরণটির বিশেষ সমাকল } y_p \text{ নির্ণয় করো।}$$

(f) Find the Laplace transform of the function $f(t) = e^{2t} \cos 7t$

$$f(t) = e^{2t} \cos 7t \text{ এই অপেক্ষকটির ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় করো।}$$

(g) Find the inverse Laplace transform L^{-1} of the function $F(s) = \frac{s}{s^2 - 9}$

$$F(s) = \frac{s}{s^2 - 9} \text{ এই অপেক্ষকটির বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় করো।}$$

(h) Form a partial differential equation by the elimination of the constants a and b from

$$z = (x^2 + a)(y^2 + b).$$

$$z = (x^2 + a)(y^2 + b) \text{ এই সমীকরণ থেকে } a \text{ এবং } b \text{ অপসারণ করিয়া একটি আংশিক অবকল সমীকরণ নির্ণয় করো।}$$

7. (a) Show that the sequence of functions $\{f_n\}_n$ defined by 5

$$f_n(x) = nx(1-x)^n, \quad x \in [0, 1] \text{ and } n \in N \text{ is not uniformly convergent on } [0, 1].$$

দেখাও যে, $\{f_n\}_n$ অনুক্রমটি $[0, 1]$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী নয় যেখানে

$$f_n(x) = nx(1-x)^n, \quad x \in [0, 1]$$

(b) Using Weierstrass's M-Test prove that the series of functions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ defined by 5

$$f_n(x) = \frac{(n+1)^3}{3^n n^5} x^n, \quad (-\infty, \infty) \text{ by } D = \{x \in R : -3 \leq x \leq 3\} \text{ and } n \in N \text{ is uniformly convergent on } D.$$

Weierstrass's M-Test এর অপেক্ষক-এর অসীম শ্রেণীর সমভাবে অভিসারিত্বের সাহায্যে দেখাও যে

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ শ্রেণীটি $(-\infty, \infty)$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী, যেখানে

$$f_n(x) = \frac{(n+1)^3}{3^n n^5} x^n, \quad D = \{x \in R : -3 \leq x \leq 3\} \text{ এবং } n \in N$$

8. (a) Show that the series of functions $\sum f_n$ where $f_n(x) = \frac{x^n}{n^3}$, $x \in [0, 1]$ is uniformly 5

$$\text{convergent on } [0, 1] \text{ and show that } \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)n^3}.$$

দেখাও যে $\sum f_n$ শ্রেণী অপেক্ষকটি $[0, 1]$ এর মধ্যে সমভাবে অভিসারী যেখানে $f_n(x) = \frac{x^n}{n^3}$,

$$x \in [0, 1], \text{ এবং দেখাও } \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)n^3}.$$

- (b) Find the Fourier series of the function f defined by $f(x)=|x|, -\pi \leq x \leq \pi$ on the interval $[-\pi, \pi]$. Hence show that $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ 5

$[-\pi, \pi]$ অন্তরালে সংজ্ঞাত $f(x)=|x|, -\pi \leq x \leq \pi$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার বিস্তৃতি নির্ণয় করো এবং তার থেকে দেখাও যে $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

9. (a) Solve: $\frac{d^3y}{dx^3} + 9\frac{dy}{dx} = 2 \cos 3x$ 5

সমাধান করো: $\frac{d^3y}{dx^3} + 9\frac{dy}{dx} = 2 \cos 3x$

- (b) Solve by method of variation of parameter $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax$ ($a \neq 0$) 5

ভেদ প্রচলন পদ্ধতিতে সমাধান করো: $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax$ ($a \neq 0$)

- 10.(a) Using method of undermined coefficient solve 5

$$(D^2 - 2D + 3)y = x^3 + \sin x, \quad \left(D \equiv \frac{d}{dx} \right)$$

অনির্ণীত সহগ পদ্ধতিতে সমাধান করো $(D^2 - 2D + 3)y = x^3 + \sin x, \quad \left(D \equiv \frac{d}{dx} \right)$

- (b) Solve: $\frac{dx}{dt} - 2x + 3y = 0, \frac{dy}{dt} - 3y = x + e^{2t}$. 5

সমাধান করো: $\frac{dx}{dt} - 2x + 3y = 0, \frac{dy}{dt} - 3y = x + e^{2t}$.

11. Answer any **five** questions from the following: 2×5 = 10

নিম্নলিখিত যে-কোনো **পাঁচটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

- (a) Prove the following inequality by induction on n :

$$2n+1 < 2^n \text{ for all integers } n \geq 3.$$

নীচের অসমতাটি n এর ওপর আরোহ প্রয়োগ করে প্রমাণ করো

$$2n+1 < 2^n, \text{ সমস্ত পূর্ণসংখ্যা } n \geq 3 \text{ -এর জন্য।}$$

- (b) If a, b, c are positive integers such that $\gcd(a, c)=1$ and c divides ab , then prove that c divides b .

যদি a, b, c ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় যেখানে $\gcd(a, c)=1$ এবং ab, c দ্বারা বিভাজিত, তাহলে প্রমাণ করো b, c দ্বারা বিভাজিত হবে।

- (c) Find all prime divisors of $50!$

$50!$ এর সকল মৌলিক উৎপাদকগুলি নির্ণয় করো।

- (d) Let a, b be integers and m a positive integer. Prove that $a \equiv b \pmod{m}$ if $a = km + b$ for some integer k .

যদি a এবং b পূর্ণসংখ্যা হয়, m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় তাহলে প্রমাণ করো $a \equiv b \pmod{m}$ যেখানে $a = km + b, k$ একটি পূর্ণসংখ্যা।

(e) Define inverse of an element $[b] \in z_n$.

$[b] \in z_n$ এর বিপরীত এর সংজ্ঞা লিখুন।

(f) In a Boolean Algebra $(B, +, \cdot, ')$, prove that $a + a = a$.

বুলীয় বীজগণিত $(B, +, \cdot, ')$ -তে প্রমাণ করো $a + a = a$.

(g) Construct the truth tables for the following Boolean expression

$$x(y + x')$$

নিম্নলিখিত বুলীয় রাশিমালাটির সত্য সারণীটি নির্ণয় করো

$$x(y + x')$$

(h) Define auxiliary equation of the recurrence relation.

আবৃত্ত সম্বন্ধের সহায়ক সমীকরণের সংজ্ঞা দাও।

12. Answer any **two** questions from the following:

5×2 = 10

নিম্নলিখিত যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

(a) If p_n is the n -th prime, then prove that $p_n \leq 2^{2^{(n-1)}}$

5

যদি p_n n -তম মৌলিক সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করো যে $p_n \leq 2^{2^{(n-1)}}$ হবে

(b) (i) Convert $(10\ 11111\ 011\ 0011)_2$ from binary to hexadecimal.

5

$(10\ 11111\ 011\ 0011)_2$ এই দ্বিনিধানী সংখ্যাটিকে ষোড়শাঙ্গী রাশিতে প্রকাশ করো।

(ii) Convert $(2FB3)_{16}$ from hexadecimal to binary.

$(2FB3)_{16}$ এই ষোড়শাঙ্গী সংখ্যাটিকে দ্বিনিধানী রাশিতে প্রকাশ করো।

(c) Find all solutions of the Diophantine equation $8x - 10y = 42$.

5

ডায়োফ্যানটাইন সমীকরণ $8x - 10y = 42$ -এর সমাধানসমূহ নির্ণয় করো।

13. Answer any **two** questions from the following:

5×2 = 10

নিম্নলিখিত যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

(a) If $2^n - 1$ is a prime, then prove that n is a prime.

5

যদি $2^n - 1$ একটি মৌলিক সংখ্যা হয়, তাহলে প্রমাণ করো যে, n একটি মৌলিক সংখ্যা।

(b) What is the remainder when

5

$1! + 2! + 3! + \dots + 99! + 100!$ is divided by 15?

$1! + 2! + 3! + \dots + 99! + 100!$ -কে 15 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে ?

(c) Solve the following system of congruences:

5

নিম্নলিখিত সর্বসমতাগুলির সমাধান নির্ণয় করোঃ

$$x \equiv 2 \pmod{7}$$

$$x \equiv 5 \pmod{19}$$

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

14. Answer any *two* questions from the following: 5×2=10
নিম্নলিখিত যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
- (a) Let $0-85312-612-x_{10}$ be the ISBN-10 of a book. Find the check digit. 5
একটি বই-এর ISBN-10 হল $0-85312-612-x_{10}$ । যাচাই অঙ্কটি নির্ণয় করো।
- (b) The identification number of a company in India is 890102. The identification number of a product of that company is 30090. Write down the UPC of this product. 5
ভারতের একটি সংস্থার পরিচায়ক সংখ্যাটি হল 890102। ঐ সংস্থার একটি পণ্যের পরিচায়ক সংখ্যাটি হল 30090। ঐ পণ্যের UPC-টি নির্ণয় করো।
- (c) Set up a Round-Robin tournament for 8 teams. 5
8 দলের একটি রাউন্ড-রবিন প্রতিযোগিতা উপস্থাপিত করো।
15. Answer any *two* questions from the following: 5×2=10
নিম্নলিখিত যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
- (a) Find the inverse of $[15]$ in \mathbb{Z}_{19} and use it to solve $[15]x = [16]$ 3+2
 \mathbb{Z}_{19} -এর মধ্যে $[15]$ -এর বিপরীত নির্ণয় করো ও এর সাহায্যে $[15]x = [16]$ -এর সমাধান করো।
- (b) Solve the congruence $72x \equiv 18 \pmod{42}$. 5
 $72x \equiv 18 \pmod{42}$ সর্বসমতাটির সমাধান করো।
- (c) If p is prime, then prove that $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. 5
মৌলিক সংখ্যা p -এর জন্য প্রমাণ করো যে, $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

—x—