



## WEST BENGAL STATE UNIVERSITY

B.Sc. General Part-II Examination, 2020

### MATHEMATICS

#### PAPER: MTMG-II

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 50

*The figures in the margin indicate full marks.  
Candidates should answer in their own words  
and adhere to the word limit as practicable.*

*প্রাঙ্গিক সীমার মধ্যস্থ সংখ্যাটি পূর্ণমান নির্দেশ করে।  
পরীক্ষার্থীরা নিজের ভাষায় যথা সম্ভব শব্দসীমার মধ্যে  
উত্তর করিবে।*

*All symbols are of usual significance.*

#### Answer Question No. 1 and any *three* from the rest

১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও

1. Answer any **four** questions from the following: 2×4 = 8

নিম্নলিখিত যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Write down the sub-sets at the set  $\{a, b, c\}$ .

$\{a, b, c\}$  -এর উপসেটগুলি লেখো।

(b) Let  $f : A \rightarrow B$  and  $g : B \rightarrow C$  be two surjective mapping, then show that  $g \circ f$  is also surjective.

$f : A \rightarrow B$  এবং  $g : B \rightarrow C$  দুটি উপরিচিত্রন হলে দেখাও যে  $g \circ f$  ও একটি উপরিচিত্রন।

(c) If  $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{a, b, c\}$ , find  $(X \times Y) \cup (Y \times X)$ .

যদি  $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{a, b, c\}$  হয়, তবে  $(X \times Y) \cup (Y \times X)$  নির্ণয় করো।

(d) Does the limit  $\lim_{x \rightarrow 1} \{x^2 + \sqrt{x-1}\}$  exist? — Justify.

$\lim_{x \rightarrow 1} \{x^2 + \sqrt{x-1}\}$  সীমাটির অস্তিত্ব সম্পর্কে বিচার করো।

(e) State Rolle's Theorem.

রোলের উপপাদ্যটি বিবৃত করো।

(f) Show that  $\sin x < x$ , for  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

যদি  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  হয় তবে দেখাও যে  $\sin x < x$ .

(g) Show that  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$  is convergent.

দেখাও যে  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$  অভিসারী।

(h) Evaluate  $\int_0^1 \int_0^2 x^3 y \, dx \, dy$ .

$\int_0^1 \int_0^2 x^3 y \, dx \, dy$  -এর মান নির্ণয় করো।

2. (a) Give an example with verification of mapping which is neither injective nor surjective. 4

এক-এক ও উপরিচিত্রন হবে না এমন একটি চিত্রনের ব্যাখ্যাসহ উদাহরণ দাও।

- (b) Show that the mapping  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defined as  $f(x) = 5x - 7, \forall x \in \mathbb{R}$  is bijective. Find  $f^{-1}$ . 4

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  চিত্রনটি এমনভাবে সংজ্ঞাত যে  $f(x) = 5x - 7, \forall x \in \mathbb{R}$ , দেখাও যে চিত্রনটি একটি এক-এক উপরিচিত্রন।  $f^{-1}$  চিত্রনটি নির্ণয় করো।

- (c) Let  $G = \{1, -1, i, -i\}$ , show that  $G$  is a group under the usual multiplication of complex numbers. 3

$G = \{1, -1, i, -i\}$  হলে দেখাও যে, জটিল সংখ্যার প্রচলিত গুণের সাপেক্ষে  $G$  একটি দল হবে।

- (d) Prove that intersection of two subgroups of a group  $G$  is also a subgroup of  $G$ . 3

প্রমাণ করো যে একটি দল  $G$ -এর দুটি উপদলের ছেদও  $G$ -এর একটি উপদল হবে।

3. (a) Let  $A$  be an invertible matrix. If  $\lambda$  be one root of the characteristic equation of  $A$ , then prove that  $\frac{1}{\lambda}$  is a root of the characteristic equation of  $A^{-1}$ . 4

ধরা যাক  $A$  ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সের অস্তিত্ব বর্তমান।  $A$  ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য সমীকরণের একটি বীজ  $\lambda$  হলে প্রমাণ করো যে  $A^{-1}$  ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য সমীকরণের বীজ হবে  $\frac{1}{\lambda}$ ।

- (b) Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . 3+3

Hence find  $A^{-1}$ .

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে Cayley-Hamilton theorem টির সত্যতা যাচাই করো।

অতঃপর  $A^{-1}$  নির্ণয় করো।

- (c) Show that the set  $A = \{(1, 2, 1), (1, 2, 0), (0, 2, 0)\}$  form a basis of the vector space  $\mathbb{R}^3$  over  $\mathbb{R}$ . Find also the co-ordinate of  $(2, 6, 1)$  w.r.t. to this basis. 4

দেখাও যে  $A = \{(1, 2, 1), (1, 2, 0), (0, 2, 0)\}$  সেটটি ভেক্টর দেশ  $\mathbb{R}$ -এর উপর  $\mathbb{R}^3$  এর একটি ভিত্তি গঠন করে। এই ভিত্তির সাহায্যে  $(2, 6, 1)$  বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

4. (a) Find the equation of the sphere through the circle  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $x + y - 2z = 4$  and the origin. 3

মূলবিন্দুগামী এবং  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $x + y - 2z = 4$  বৃত্তগামী গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

- (b) Find the equation of the plane through the point  $(2, 5, -8)$  and perpendicular to each of the planes  $2x - 3y + 4z + 1 = 0$  and  $4x + y - 2z + 6 = 0$ . 4

$2x - 3y + 4z + 1 = 0$  এবং  $4x + y - 2z + 6 = 0$  সমতল দুটির প্রত্যেকটির উপর লম্ব এবং  $(2, 5, -8)$  বিন্দুগামী সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

- (c) Find the equation of the straight line passing through the point  $(1, 2, 3)$  and parallel to the line  $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$ . 3

এমন একটি সরলরেখা নির্ণয় করো যা  $(1, 2, 3)$  বিন্দুগামী এবং  $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$  সরলরেখার সমান্তরাল।

- (d) Show that the straight lines  $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{5}$  and  $x + 2y + 3z - 9 = 0 = 2x - y + 2z - 11$  are coplanar. 4

দেখাও যে  $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{5}$  এবং  $x + 2y + 3z - 9 = 0 = 2x - y + 2z - 11$  সরলরেখা দুটি একই সমতলে অবস্থিত।

5. (a) Find the value of  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$ . 3

মান নির্ণয় করো:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$ ।

- (b) Prove that a convergent sequence is bounded. 3

প্রমাণ করো যে অভিসারী অনুক্রম বদ্ধ।

- (c) Show that  $\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}$ , when  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . 4

দেখাও যে  $\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}$ , যখন  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ।

- (d) State and prove Cauchy's Mean Value Theorem. 4

Cauchy Mean Value Theorem বিবৃত করে প্রমাণ করো।

6. (a) Test the convergence of  $\sum \frac{n^3 + 1}{n^3 + 2} x^{n-1}$ ,  $x > 0$ . 3

$\sum \frac{n^3 + 1}{n^3 + 2} x^{n-1}$ ,  $x > 0$  শ্রেণীটির অভিসারিত্ব পরীক্ষা করো।

- (b) Find the asymptotes of the curve  $x = \frac{t^2}{1+t^3}$ ,  $y = \frac{t^2+2}{1+t}$ . 4

$x = \frac{t^2}{1+t^3}$ ,  $y = \frac{t^2+2}{1+t}$  বক্র রেখাটির স্পর্শ প্রবণ সরলরেখাটি নির্ণয় করো।

- (c) Find the area bounded by the parabola  $y^2 = x$  and its latus rectum. 3

$y^2 = x$  অধিবৃত্ত এবং এর নাভিলম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

- (d) Prove that  $\beta(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta$ ; ( $m, n > 0$ ) and hence find the value of  $\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . 4

প্রমাণ করো  $\beta(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta$ ; ( $m, n > 0$ ) এবং এর থেকে  $\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  এর মান নির্ণয় করো।

7. (a) Solve:  $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 2x \cos 2x$ . 3

সমাধান করো:  $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 2x \cos 2x$ ।

- (b) Solve:  $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 12x + xe^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ . 4

সমাধান করো:  $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 12x + xe^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ ।

- (c) Solve:  $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 10(x + \frac{1}{x})$ . 4

সমাধান করো:  $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 10(x + \frac{1}{x})$ ।

- (d) Find the equation of the curve whose slope at the point  $(x, y)$  is  $(1+2x)$ . Determine the nature of the curve. 3

যে বক্রটি  $(x, y)$  বিন্দুতে নতি  $(1+2x)$  তার সমীকরণ নির্ণয় করো। বক্রটির প্রকৃতি নির্ণয় করো।

**N.B. :** Students have to complete submission of their Answer Scripts through E-mail / Whatsapp to their own respective colleges on the same day / date of examination within 1 hour after end of exam. University / College authorities will not be held responsible for wrong submission (at in proper address). Students are strongly advised not to submit multiple copies of the same answer script.

—×—